

Grundlagen der Elektrotechnik
Praktikum Teil 1
Versuch B1/1

”Ausgleichsvorgänge in linearen Netzwerken”

Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik (ATE)

Elektrotechnik und Informationstechnik
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Universität Duisburg-Essen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einschalten einer Gleichspannungsquelle	1
1.2	Einschalten einer Wechselspannung	3
1.3	Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung	4
1.4	Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation	5
1.5	Schaltvorgänge in einem induktiven Kreis	8
2	Schaltvorgänge in einem Serienschwingkreis	8
2.1	Einschalten einer Gleichspannung	8
2.2	Einschalten einer sinusförmigen Wechselspannung	10
2.3	Die Anregungsfrequenz ist gleich der Resonanzfrequenz	10
2.4	Die Anregungsfrequenz ist von der Resonanzfrequenz verschieden	11
3	Versuchsbeschreibung	12
3.1	Versuchsdurchführung	12

1 Einleitung

Ein Ausgleichsvorgang beschreibt den zeitlichen Ablauf des Übergangs von einem eingeschwingenen Zustand in einen anderen, wenn sich in einem Netzwerk die Amplitude, die Frequenz oder der Winkel der "Erregung" ändern. Die häufigste Ursache von Ausgleichsvorgängen stellt in der Praxis Schaltvorgänge durch das Öffnen oder Schließen von Schaltern im Netzwerk dar. Diese Ausgleichsvorgänge sind auf die Wirkung derjenigen Bauelemente zurückzuführen, die in der Lage sind, elektrische oder magnetische Energie zu speichern, also Kondensatoren und Spulen. Bei jedem Schaltvorgang, der in einem Netzwerk auftritt, können sich die in diesen Bauelementen gespeicherten Energien nur stetig ändern, da eine sprunghafte Änderung der Energie eine unendlich große Leistung erfordern würde und daher auszuschließen ist.

Die gespeicherten Energien werden wie folgt beschrieben:

$$\text{für den Kondensator durch:} \quad W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad (1)$$

$$\text{für die Spule durch:} \quad W = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot I = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt bei der oben bereits erwähnten stetigen Änderung der Energien, dass die an der Kapazität anliegende elektrische Spannung sowie die in der Induktivität auftretende elektrische Stromstärke jeweils stetige Funktionen der Zeit sein müssen. Die weitere Betrachtung wird zeigen, dass diese Folgerungen aus den Gleichungen (1) und (2) die entscheidenden Grundlagen bei der Behandlung von Schaltvorgängen sind.

Die Schaltvorgänge in einem Netzwerk können mit den gleichen Verfahren behandelt werden, die auch bei der Analyse von Schaltungen ohne Einschaltvorgänge angewendet werden (z. B. Maschen- und Knotenanalyse, direkte Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze). Wählt man diesen Weg, so ist stets die Lösung einer Differentialgleichung erforderlich. In einfachen Fällen mag dies noch gelingen und mit einiger Routine kann man die Lösung durch "scharfes Hinsehen" angeben. Die Vorgehensweise scheitert jedoch in aller Regel bereits dann, wenn man nicht mehr nur Gleichspannungen und -ströme schaltet, sondern zeitlich veränderliche Größen eingepreßt werden. In diesen Fällen kommt bevorzugt die Laplace-Transformation zum Einsatz, mit deren Hilfe es möglich ist, eine Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung zu überführen, die in aller Regel einfacher zu lösen ist.

Die in jedem Fall zur Lösung benötigten Zusammenhänge zwischen elektrischer Stromstärke $i(t)$ und elektrischer Spannung $u(t)$ an den verschiedenen Netzwerkelementen lauten

$$\begin{array}{lll} \text{für den Widerstand} & u_R(t) = R \cdot i_R(t) & \text{bzw.} \quad i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} \\ \text{für den Kondensator} & u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau & \text{bzw.} \quad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \\ \text{für die Spule} & u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} & \text{bzw.} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau \end{array}$$

wobei R der ohmsche Widerstand, C die Kapazität des Kondensators und L die Induktivität der Spule sind.

1.1 Einschalten einer Gleichspannungsquelle

Ein einfaches Beispiel für die Berechnung eines Ausgleichsvorganges, an dem die grundsätzliche Vorgehensweise demonstriert werden soll, ist in Bild 1 dargestellt. Die Differentialgleichung, der die Kondensatorspannung gehorchen muss, lässt sich aus einem Maschenumlauf (im geschlossenen Zustand des Schalters, also für $t \geq 0$) und der Differentialform des Zusammenhanges zwischen Spannung und Strom am Kondensator ableiten.

$$R \cdot i_C(t) + u_C(t) = U_0 \quad \implies \quad \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_C(t) = \frac{U_0}{\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = RC \quad (3)$$

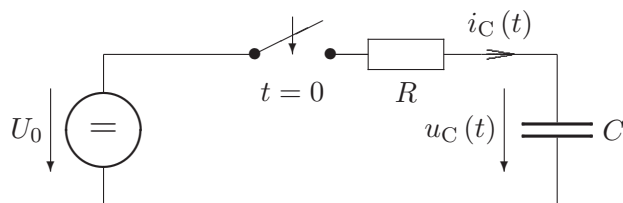


Abbildung 1. Einschalten einer Gleichspannung am Beispiel einer Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Kondensator.

Es zeigt sich also, dass die Lösung des Problems darauf hinaus läuft, eine lineare, homogene Differentialgleichung ersten Grades mit konstanten Koeffizienten zu erfüllen. Eine eindeutige Lösung ist jedoch nur dann gewährleistet, wenn ein Anfangswert für die Kondensatorspannung vorgegeben ist. Nimmt man an, dass man die Kondensatorspannung $u_C(t=0-) = u_{C0}$ unmittelbar vor dem Einschalten kennt, so erhält man die vollständige Beschreibung des Anfangswertproblems:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_C(t) = \frac{U_0}{\tau} \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{und} \quad u_C(t=0+) = u_C(t=0-) = u_{C0} \quad (4)$$

Die Bezeichnungen $t = 0+$ und $t = 0-$ bedeuten Zeitpunkte unmittelbar nach bzw. unmittelbar vor dem Schaltzeitpunkt. Die Kondensatorspannung hat in beiden Zeitpunkten den gleichen Wert, da sie stetig ist. Um diese Eigenschaft bei der Lösung des Anfangswertproblems sinnvoll zu nutzen, bietet es sich an, die Differentialgleichung so aufzustellen bzw. umzuformen, dass die stetige Zeitfunktion die gesuchte Größe ist (wie hier geschehen). Die Lösung dieser Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (Schaltbedingung) für die Kondensatorspannung kann auf verschiedene Arten gefunden werden. Eine Möglichkeit ist die Lösung der homogenen Gleichung mit Hilfe elementarer Lösungsansätze. Dies sind Funktionen, die aus der Mathematik als Lösungen des Problems bekannt sind. Die partikuläre Lösung kann in aller Regel durch einfache Überlegungen gefunden werden. Im vorliegenden Beispiel sehen die homogene Differentialgleichung und der Lösungsansatz folgendermaßen aus:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{C,\text{hom}}(t) = k \cdot e^{\alpha t} \quad (5)$$

Die Konstanten k und α sind noch zu bestimmen. Setzt man den Lösungsansatz aus der Gleichung (5) in die homogene Differentialgleichung ein, so erhält man:

$$k \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} + \frac{k}{\tau} \cdot e^{\alpha t} = 0$$

Schließt man die triviale Lösung $k = 0$ aus, und beachtet man weiterhin, dass die Exponentialfunktion für endliche Werte von α und t stets von Null verschieden ist, kann die obige Gleichung durch $k \cdot e^{\alpha t}$ dividiert werden. Man erhält auf diese Weise die Bedingung $\alpha = -1/\tau$. Da im Exponenten der e-Funktion das Argument $-t/\tau$ auftritt, wird τ die Zeitkonstante der Schaltung genannt. Die partikuläre Lösung beschreibt ganz allgemein ausgedrückt einen eingeschwungenen Zustand, in dem alle durch das Einschalten auftretenden Vorgänge bereits abgeklungen sind. Da es sich bei der Quelle in diesem Beispiel um eine Gleichspannungsquelle handelt, treten im eingeschwungenen Zustand keinerlei zeitliche Änderungen auf: $\frac{du_{C,\text{part}}(t)}{dt} = 0$. Mit dieser Bedingung kann man die partikuläre Lösung direkt aus der Differentialgleichung (4) ablesen, da der Term, der die Ableitung nach der Zeit enthält, auf diese Weise entfällt. Es gilt also $u_{C,\text{part}} = U_0$. Die Summe von homogener und partikulärer Lösung ergibt die Gesamtlösung für die Kondensatorspannung. Setzt man zusätzlich die Anfangsbedingung ein, so gelingt es, auch noch den Koeffizienten k zu bestimmen:

$$u_C(t) = u_{C,\text{hom}}(t) + u_{C,\text{part}} = k \cdot e^{-t/\tau} + U_0 \quad \text{und} \quad u_C(t=0) = k + U_0 = u_{C0}$$

Damit folgt $k = u_{C0} - U_0$ und schließlich

$$u_C(t) = U_0 + (u_{C0} - U_0) \cdot e^{-t/\tau} = u_{C0} \cdot e^{-t/\tau} + U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6)$$

Ist der Kondensator im Schalt Augenblick auf die Spannung U_0 aufgeladen, so zeigt (6), dass der Ausgleichsvorgang ausbleibt. Für $u_{C0} = 0$, d. h. für einen im Schalt Augenblick ungeladenen Kondensator liefert (6):

$$u_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad (7)$$

Bild 2 zeigt den Verlauf von $u(t)$ nach (6) für verschiedene Werte von u_{C0} . Wird der zeitliche Verlauf

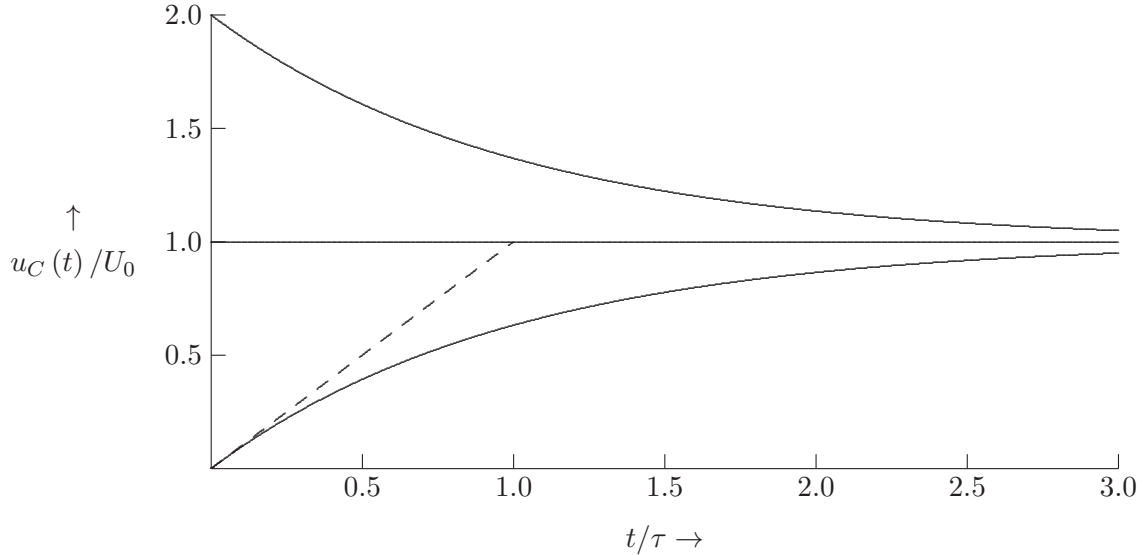


Abbildung 2. Die durchgezogenen Kurven stellen die Kondensatorspannung $u_C(t)$ nach (6) für verschiedene Werte von u_{C0} dar. Die gestrichelte Linie zeigt eine Tangente zur Bestimmung der Zeitkonstanten τ im Fall $u_{C0} = 0$, siehe auch Gleichung (8).

beispielsweise mit einem x - y -Schreiber aufgenommen, so hat man die Möglichkeit, die Zeitkonstante zeichnerisch zu bestimmen. Dazu bedient man sich einer Eigenschaft der e -Funktion. Der Endwert der Spannung beträgt gemäß Gleichung (6) stets U_0 . Die Ableitung der Spannung nach der Zeit beträgt im Einschaltzeitpunkt:

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \left(-\frac{1}{\tau} u_{C0} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} U_0 \cdot e^{-t/\tau} \right) \Big|_{t=0} = \frac{U_0 - u_{C0}}{\tau} \quad (8)$$

Da der Anfangswert der Spannung u_{C0} ist, beträgt die Differenz zwischen End- und Anfangswert $U_0 - u_{C0}$. Der Funktionswert des Graphen der Tangente nach Gleichung (8) bei $t = \tau$ ist daher stets genau U_0 . Rückwärts kann man nun folgern, dass der Schnittpunkt der Tangente mit einer Parallelen zur Zeitachse durch $u_C = U_0$ genau bei τ liegt. Die Tangente für den Fall $u_{C0} = 0$ ist in Bild 2 eingezeichnet.

1.2 Einschalten einer Wechselspannung

Nun soll an die Schaltung aus dem vorangegangenen Beispiel eine Wechselspannung angeschaltet werden. Die Differentialgleichung ist die gleiche wie zuvor, und auch die Lösungsstrategie kann übernommen werden. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass die partikuläre Lösung nicht so einfach gefunden werden kann wie im Gleichspannungsfall. Wiederum wird davon ausgegangen, dass die Spannung $u_C(t = 0^-) = u_{C0}$, die am Kondensator zum Schaltzeitpunkt anliegt, bekannt ist. Das zu lösende Anfangswertproblem lautet also hier:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot u_C(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u_0(t) \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{und} \quad u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = u_{C0} \quad (9)$$

Die eingeschaltete Spannung soll folgendermaßen charakterisiert werden:

$$u_0(t) = \hat{u}_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re}\{\hat{u}_0 \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{mit} \quad \hat{u}_0 = \hat{u}_0 \cdot e^{j\phi_u}$$

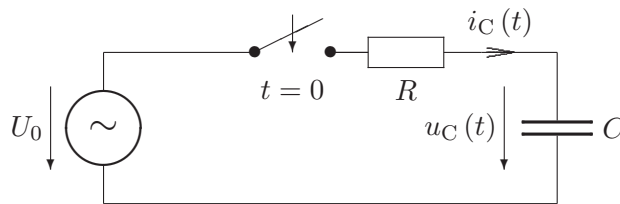


Abbildung 3. Einschalten einer Wechselspannung am Beispiel einer Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Kondensator.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung geschieht analog zum Gleichspannungsfall. Die partikuläre Lösung beschreibt nun jedoch einen zeitlich veränderlichen Vorgang, nämlich den eingeschwungenen Zustand, der sich einstellt, wenn der Einfluss des Einschaltvorganges abgeklungen ist. Es ist also möglich, die partikuläre Lösung mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung zu bestimmen. Es gilt:

$$u_{C,\text{part}}(t) = \text{Re}\{\hat{u}_{C,\text{part}} \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{mit} \quad \hat{u}_{C,\text{part}} = \hat{u}_{C,\text{part}} \cdot e^{j\varphi_{C,\text{part}}} \quad (10)$$

Für die hier vorliegende Schaltung ergibt sich für $\hat{u}_{C,\text{part}}$:

$$\hat{u}_C = \hat{u}_0 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{u}_0 \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{j(\varphi_u - \arctan(\omega RC))}$$

und damit die Zeitfunktion:

$$u_{Cp}(t) = \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \arctan(\omega RC))$$

1.3 Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Eine allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich aus der Summe der Lösung der homogenen Differentialgleichung und der partikulären Lösung. Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u_C(t) = u_{C,\text{hom}}(t) + u_{C,\text{part}}(t) = k \cdot e^{-t/\tau} + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \arctan(\omega RC))$$

wobei $\tau = R \cdot C$ ist und k eine Amplitudenkonstante ist, die aus der Anfangsbedingung (Schaltbedingung) für $u_C(t)$ im Schaltzeitpunkt $t = 0$ gewonnen wird. Für $t = 0$ ergibt sich mit $u_C(t = 0^-) = u_{C0}$:

$$u_{C0} = k + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\varphi_u - \arctan(\omega\tau))$$

und nach k aufgelöst

$$k = u_{C0} - \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\varphi_u - \arctan(\omega\tau))$$

Die gesuchte Spannung $u_C(t)$ am Kondensator hat somit die Form:

$$u_C(t) = \left(u_{C0} - \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\varphi_u - \arctan(\omega\tau)) \right) \cdot e^{-t/\tau} + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \arctan(\omega\tau)) \quad (11)$$

Der erste Term der Lösung verschwindet für $t \rightarrow \infty$ und wird deshalb auch flüchtiger oder abklingender Vorgang genannt. Der zweite Term ist dagegen vom Schaltvorgang unabhängig und wird als stationärer Vorgang bezeichnet. Der Verlauf von $u_C(t)$ nach Gleichung (11) ist in Bild 4 für verschiedene Werte von u_{C0} dargestellt. An dieser Stelle zeigt sich, dass der Ausgleichsvorgang durch eine geeignete Wahl

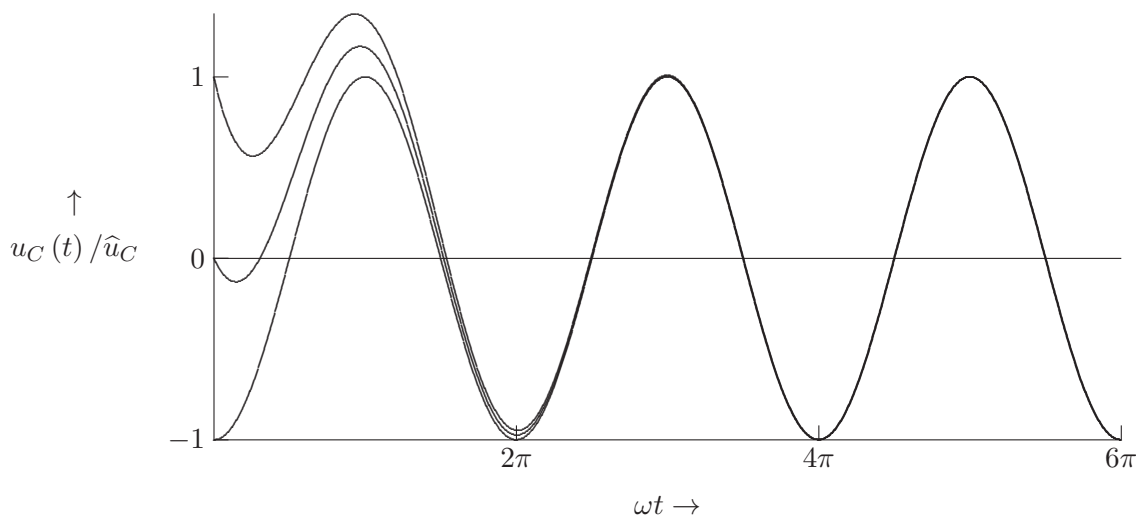


Abbildung 4. Verlauf von $u_C(t)$ für verschiedene Werte von u_{C0} . Es gilt: $\varphi_u - \arctan(\omega\tau) = \pi$.

des Phasenwinkels φ_u im Einschaltaugenblick unterdrückt werden kann. Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$k = u_{C0} - \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \cos(\varphi_u - \arctan(\omega\tau)) = 0$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach φ_u ergibt sich:

$$\varphi_u = \arccos\left(\frac{u_{C0}}{\hat{u}_0} \cdot \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right) + \arctan(\omega\tau)$$

Anschaulich lässt sich dieser Sachverhalt für den Fall $u_{C0} = 0$ (der Kondensator ist im Schalt Augenblick ungeladen), d. h. $\varphi_u = (2n + 1) \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega\tau)$ darstellen. In diesem Fall gilt

$$u(t) = \hat{u}_0 \cdot \cos\left(\omega t + (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega\tau)\right) \quad \text{und} \quad u_C(t) = \frac{\hat{u}_0 \cos\left(\omega t + (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}},$$

d. h. die beiden Spannungen $u(t)$ und $u_C(t)$ haben genau die Phasenverschiebung gegeneinander, die sich auch im eingeschwungenen Zustand einstellt. Das bedeutet: **Bei Anregung des elektrischen Netzwerkes nach Bild 3 durch eine sinusförmige Spannung lässt sich der Ausgleichsvorgang dann unterdrücken, wenn der Einschaltzeitpunkt derart gewählt wird, dass die Quellenspannung im Zeitpunkt des Schaltens den Wert annimmt, den sie im eingeschwungenen Zustand beim Nulldurchgang der Kondensatorspannung hat.** Das Bild 5 zeigt die günstigen Einschaltzeitpunkte.

1.4 Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation

Als Beispiel für die Lösung von Schaltproblemen mit Hilfe der Laplace-Transformation soll das Ergebnis von Gleichung (7) hergeleitet werden. Gegeben ist erneut die Schaltung nach Bild 6. Der Einschaltvorgang wird unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Kondensator zum Schaltzeitpunkt ungeladen sein soll, durch die folgende Differentialgleichung nebst Anfangsbedingung beschrieben:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot u(t) \quad \text{mit} \quad u_C(t = 0-) = u_{C0} = 0 \quad (12)$$

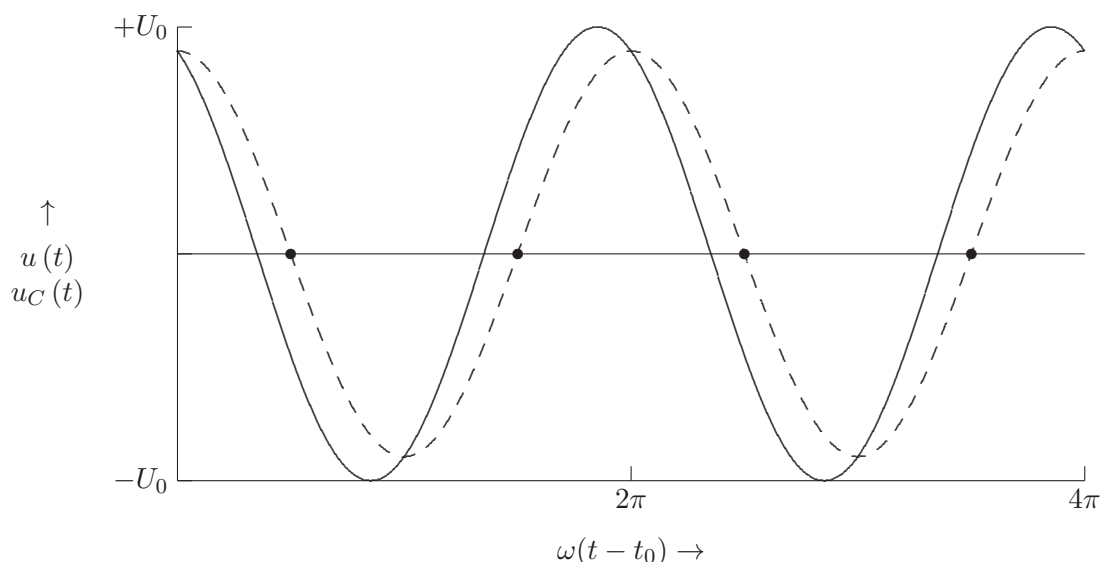


Abbildung 5. Darstellung von Quellenspannung (durchgezogene Kurve) und Kondensatorspannung (gestrichelte Kurve) im eingeschwungenen Zustand ($t > t_0$). Markierung der günstigen Schaltzeitpunkte (\bullet).

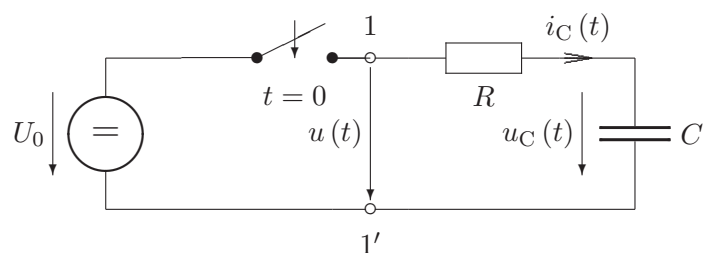


Abbildung 6. Einschalten einer Gleichspannung am Beispiel einer Reihenschaltung aus ohmschen Widerstand und Kondensator.

Die Größe $u(t)$ in (12) stellt die Spannung der Klemmen 1–1' dar und kann in der Form

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

angegeben werden. Zur Bestimmung von $u_C(t)$ wird nun die Laplace-Transformierte in (12) gebildet. Die Transformationsvorschrift hierfür lautet:

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \underline{F}(\underline{s}) = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} f(\tau) \cdot e^{-\underline{s}\tau} d\tau \quad (14)$$

Die für die Laplace-Transformation gültigen Rechenregeln sind in der Literatur¹ hergeleitet und werden hier als bekannt vorausgesetzt. Mit (14) und der Anwendung des Satzes über die Linearkombination ergibt sich aus (12):

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du_C(t)}{dt}\right\} + \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{L}\{u_C(t)\} = \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (15)$$

Der erste Summand in (15) lässt sich mit Hilfe des Differentiationssatzes für die Originalfunktion in die Beziehung

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du_C(t)}{dt}\right\} = \underline{s} \cdot \mathcal{L}\{u_C(t)\} - u_C(0) \quad (16)$$

¹Z. B. in I. Wolff: Grundlagen der Elektrotechnik 4

umformen, so dass sich (15) zu

$$\mathcal{L}\{u_C(t)\} \cdot \left(\underline{s} + \frac{1}{RC} \right) - u_C(0) = \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (17)$$

ergibt. Mit $u_C(0) = 0$ ergibt sich:

$$\mathcal{L}\{u_C(t)\} = \frac{1}{RC \left(\underline{s} + \frac{1}{RC} \right)} \cdot \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (18)$$

$\mathcal{L}\{u(t)\}$ lässt sich entweder mit der Transformationsvorschrift aus der Gleichung (14) berechnen oder aus Tabellen entnehmen.

An dieser Stelle soll die Transformationsvorschrift (14) in Anwendung auf (13) benutzt werden. Einsetzen von (13) in (14) und Integration ergibt:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} U_0 \cdot e^{-st} dt = \left[-U_0 \cdot \frac{1}{\underline{s}} \cdot e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{U_0}{\underline{s}} \quad (19)$$

Damit ergibt sich die Laplace-Transformierte von $u_C(t)$ zu:

$$\mathcal{L}\{u_C(t)\} = \frac{U_0}{RC} \cdot \frac{1}{\underline{s} \cdot \left(\underline{s} + \frac{1}{RC} \right)} \quad (20)$$

Die Rücktransformation von (20) erfolgt nach den in der Literatur² hergeleiteten Rechenregeln. Hierzu wird der zweite Faktor auf der rechten Seite der Gleichung (20) in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{1}{\underline{s} \cdot \left(\underline{s} + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{\underline{A}}{\underline{s}} + \frac{\underline{B}}{\underline{s} + \frac{1}{RC}} = \frac{(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \underline{s} + \frac{\underline{A}}{RC}}{\underline{s} \cdot \left(\underline{s} + \frac{1}{RC} \right)} \quad (21)$$

Vergleicht man die Koeffizienten im ersten und letzten Term in Gleichung (21), so ergeben sich Bestimmungsgleichungen für \underline{A} und \underline{B} :

$$\underline{A} + \underline{B} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\underline{A}}{RC} = 1 \quad (22)$$

Aus (22) ergeben sich für \underline{A} und \underline{B} die Beziehungen $\underline{A} = RC$ und $\underline{B} = -RC$, so dass sich (20) in der Form

$$\mathcal{L}\{u_C(t)\} = \frac{U_0}{\underline{s}} - \frac{U_0}{\underline{s} + \frac{1}{RC}} \quad (23)$$

angeben lässt.

Der erste Summand in (23) stellt nach (19) die Transformierte der Spannung $u(t)$ dar. Der zweite Summand in (23) ergibt unter der Anwendung von (18) und des Dämpfungssatzes

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = \underline{F}(\underline{s} + a) \quad (24)$$

die Spannung

$$u_1(t) = u(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{für} \quad t \geq 0 \quad (25)$$

Damit lässt sich die gesuchte Spannung am Kondensator $u_C(t)$ angeben:

$$u_C(t) = u(t) - u_1(t) = u(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

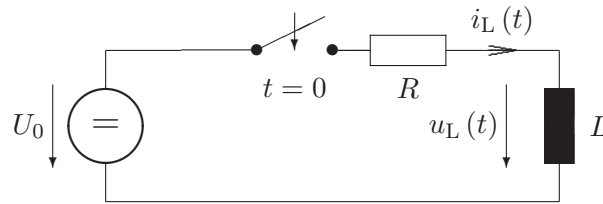


Abbildung 7. Einschalten einer Gleichspannung am Beispiel einer Reihenschaltung aus ohmschen Widerstand und Spule.

1.5 Schaltvorgänge in einem induktiven Kreis

Die Differentialgleichung für das in Bild 7 gegebene Problem lautet:

$$R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = U_0 \quad , \quad i_L(0-) = 0 \quad (27)$$

mit der Lösung:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right) \quad (28)$$

Der Strom steigt exponentiell von Null auf seinen Endwert U_0/R mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$. Wird nach Abschluss des Ausgleichsvorgangs in diesem Kreis nun die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt, so wird der Strom nicht unmittelbar auf den Wert Null abfallen, sondern er klingt mit der Zeitkonstanten L/R exponentiell gegen Null ab. Bei dem Versuch, den Stromkreis zu unterbrechen, steigt die Spannung an der Unterbrechungsstelle so weit an, dass es zum Überschlag kommen und ein entsprechender Ausgleichsstrom fließen kann. Dieser Effekt ist in allen induktiven Kreisen zu beachten, weil dabei Kontakte durch Funken- oder Lichtbogenbildung beschädigt oder elektronische Schalter zerstört werden können. Abhilfe kann geschaffen werden, indem der Strom langsam heruntergestellt wird, oder indem man z. B. parallel zur Induktivität eine in Sperrichtung gepolte Diode schaltet, eine sogenannte Freilaufdiode. Die Diode spielt im normalen Betrieb keine Rolle, bei Abschaltvorgängen leitet sie jedoch den Ausgleichsstrom der Induktivität ab und verhindert Spannungsspitzen. Beim Anschalten einer sinusförmigen Wechselspannung im Stromkreis nach Bild 7 ist der Ausgleichsvorgang wiederum von der augenblicklichen Phasenlage der Quellenspannung abhängig, ähnlich wie in Bild 5 dargestellt. Es gibt wieder einen günstigen Einschaltzeitpunkt, bei dem kein Ausgleichsvorgang auftritt. Das ist genau dann der Fall, wenn zum Schaltzeitpunkt der eingeschwungene Strom gerade eine Nullstelle hat. Ansonsten überlagert sich dem eingeschwungenen Strom wieder ein exponentiell abklingender Ausgleichsstrom. Beim Abschalten eines induktiven Wechselstromnetzes lassen sich demnach Spannungsspitzen vermeiden, wenn dafür gesorgt wird, dass genau im Nulldurchgang des Stromes abgeschaltet wird.

2 Schaltvorgänge in einem Serienschwingkreis

2.1 Einschalten einer Gleichspannung

Die Differentialgleichung lautet:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = U_0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0 \quad (29)$$

Die Anfangsbedingungen, die für die Lösung selbstverständlich benötigt werden, erhält man, indem man die Schaltung im Schaltaugenblick betrachtet. Es werde davon ausgegangen, dass die Spule

²Z. B. in W. Ameling: Laplace-Transformation

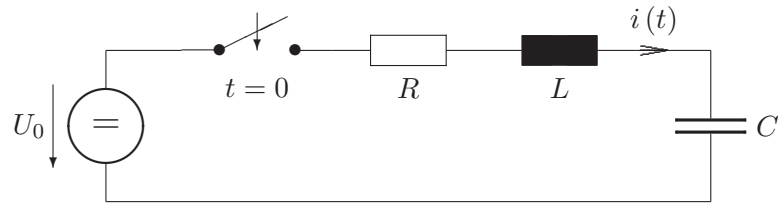


Abbildung 8. Einschalten einer Gleichspannung am Beispiel eines Reihenschwingkreises.

stromlos und der Kondensator ungeladen seien. Die Anfangsbedingung für den Strom lautet also $i(t=0+) = 0$. Weiterhin muss die Spannung an der Reihenschaltung von R , L und C gleich U_0 sein. Der einzige Spannungsabfall, der im Schalt Augenblick möglich ist, ist eine in der Spule induzierte Spannung. Es gilt also $(di(t)/dt)|_{t=0+} = U_0/L$. Transformiert man die Differentialgleichung (29) und berücksichtigt dabei direkt die Einschaltbedingungen, so erhält man:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} \left(s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right) = \frac{U_0}{L} \Rightarrow \mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{U_0}{L} \frac{1}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (30)$$

Die Rücktransformation kann beispielsweise durch Partialbruchzerlegung geschehen. Die Partialbruchzerlegung erfordert im vorliegenden Fall die Lösung einer quadratischen Gleichung. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden. Mit der Abkürzung $\omega_L = \sqrt{\left| \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \right|}$ ergibt sich:

$$(a) \quad \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow i(t) = \frac{U_0}{\omega_L L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh(\omega_L \cdot t) \quad (31)$$

$$(b) \quad \frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow i(t) = \frac{U_0}{L} \cdot t \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (32)$$

$$(c) \quad \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow i(t) = \frac{U_0}{\omega_L L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega_L \cdot t) \quad (33)$$

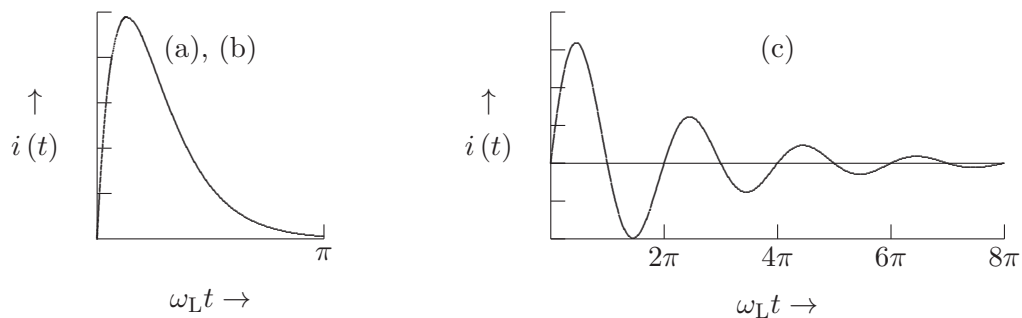


Abbildung 9. Darstellung des Stromverlaufes: (a) für den Fall der starken Dämpfung $\left(\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}\right)$ gemäß Gleichung (31), (b) im aperiodischen Grenzfall $\left(\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}\right)$, siehe Gleichung (32), für den sich ein sehr ähnlicher Kurvenverlauf wie im Fall der starken Dämpfung ergibt und (c) für den Fall der schwachen Dämpfung $\left(\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}\right)$ gemäß Gleichung (33).

2.2 Einschalten einer sinusförmigen Wechselspannung

Die Differentialgleichung, welche den Einschaltvorgang beschreibt, weicht von Gleichung (29) ab, da die eingeprägte Spannung für $t > 0$ zeitabhängig ist. Man leitet also ab:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt}$$

Um alle Phasenlagen der eingepprägten Spannung im Schaltzeitpunkt zuzulassen, wird die Quellenspannung aus einer reinen Sinus- und einer reinen Cosinus-Schwingung zusammengesetzt:

$$u(t) = \hat{u}_{\sin} \sin(\omega_Q t) + \hat{u}_{\cos} \cos(\omega_Q t)$$

Mit den oben bereits angestellten Betrachtungen für die Anfangsbedingungen für den Strom ergibt sich für die Transformierte:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{1}{L} \frac{\hat{u}_{\sin} s \omega_Q + \hat{u}_{\cos} s^2}{(s^2 + \omega_Q^2) (s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} = \frac{1}{L} \frac{\hat{u}_{\sin} s \omega_Q + \hat{u}_{\cos} s^2}{(s^2 + \omega_Q^2) (s^2 + \frac{R}{L} + \omega_0^2)}$$

Hierbei müssen zunächst zwei Fälle unterschieden werden:

- Die Frequenz ω_Q der Anregung ist gleich der Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ des Schwingkreises.
- Die Anregungsfrequenz ist von der Resonanzfrequenz verschieden ($\omega_Q \neq \omega_0$).

In beiden Fällen muss dann noch nach dem Grad der Dämpfung unterschieden werden.

2.3 Die Anregungsfrequenz ist gleich der Resonanzfrequenz

Die Transformierte kann in diesem Fall wie folgt angegeben werden:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{1}{L} \frac{\hat{u}_{\sin} s \omega_0 + \hat{u}_{\cos} s^2}{(s^2 + \omega_0^2) (s^2 + \frac{R}{L} + \omega_0^2)}$$

Je nach der Dämpfung des Einschwingvorganges, hervorgerufen durch den ohmschen Widerstand R , ergeben sich drei unterschiedliche Partialbruchzerlegungen für diese Transformierte. Es wird hier jeweils der Term $s^2 + \frac{R}{L} + \omega_0^2$ betrachtet.

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} \quad \Rightarrow \quad s^2 + \frac{R}{L} + \omega_0^2 = \left(s + \frac{R}{2L} + \omega_L\right) \left(s + \frac{R}{2L} - \omega_L\right) \quad (34)$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \quad \Rightarrow \quad s^2 + \frac{R}{L} + \omega_0^2 = (s + \omega_0)^2 \quad (35)$$

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \quad \Rightarrow \quad s^2 + \frac{R}{L} + \omega_0^2 = \left(s + \frac{R}{2L} + j\omega_L\right) \left(s + \frac{R}{2L} - j\omega_L\right) \quad (36)$$

Transformiert man die sich in jedem Fall ergebenden Partialbrüche in den Zeitbereich zurück, so erhält man die Funktionen:

$$i(t) = \frac{\hat{u}_{\sin}}{R} \left(\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh \omega_L t \right) + \frac{\hat{u}_{\cos}}{R} \left(\cos \omega_0 t - e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\cosh \omega_L t - \frac{R}{\omega_L} \sinh \omega_L t \right) \right) \quad (37)$$

$$i(t) = \frac{\hat{u}_{\sin}}{R} \left(\sin \omega_0 t - \omega_0 t e^{-\omega_0 t} \right) + \frac{\hat{u}_{\cos}}{R} \left(\cos \omega_0 t - (1 - \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right) \quad (38)$$

$$i(t) = \frac{\hat{u}_{\sin}}{R} \left(\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_L} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin \omega_L t \right) + \frac{\hat{u}_{\cos}}{R} \left(\cos \omega_0 t - e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \left(\cos \omega_L t - \frac{R}{\omega_L} \sin \omega_L t \right) \right) \quad (39)$$

für den Fall der starken Dämpfung (siehe Gleichung (37)), der kritischen Dämpfung (siehe Gleichung (38)) und der schwachen Dämpfung (siehe Gleichung (39)). Da der Einschwingvorgang nur bei einer sehr geringen Dämpfung deutlich zu beobachten ist, wird hier nur dieser Fall graphisch dargestellt, siehe Bild 10. Man beachte, dass die im Einschwingvorgang zusätzlich zur periodischen Lösung auftretenden Sinus- und Cosinus-Schwingungen nicht die Frequenz der Quellenspannung besitzen.

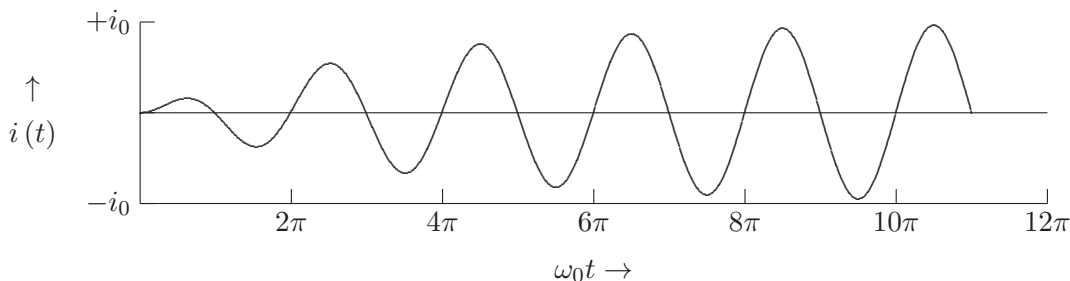


Abbildung 10. Stromverlauf in einem schwach verlustbehafteten Reihenschwingkreis beim Einschalten einer sinusförmigen Spannung. Die Frequenz der Quellenspannung stimmt mit der Resonanzfrequenz des Schwingkreises überein.

2.4 Die Anregungsfrequenz ist von der Resonanzfrequenz verschieden

Dieser Fall liefert sehr komplizierte Funktionen für den Strom. Es soll daher an dieser Stelle nur der Weg beschrieben werden, wie die Zeitfunktion zu finden ist. Weiterhin werden einige Beispiele graphisch dargestellt. Die Transformierte des Stromes lautet unter der Annahme, dass die Quelle eine Spannung der Frequenz ω_Q liefert:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{u_{\sin} s \omega_Q + u_{\cos} s^2}{L (s^2 + \omega_Q^2) (s^2 + \frac{R}{L} s + \omega_0^2)} \quad (40)$$

Diese Transformierte kann als Partialbruchzerlegung geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{i(t)\} = & \frac{u_{\sin}}{L^2 (\omega_0^2 - \omega_Q^2)^2 + R^2 \omega_Q^2} \left(\frac{sL\omega_Q (\omega_0^2 - \omega_Q^2) + R\omega_Q^3}{s^2 + \omega_Q^2} - \frac{sL\omega_Q (\omega_0^2 - \omega_Q^2) + R\omega_0^2 \omega_Q}{s^2 + \frac{R}{L} s + \omega_0^2} \right) \\ & + \frac{u_{\cos}}{L^2 (\omega_0^2 - \omega_Q^2)^2 + R^2 \omega_Q^2} \left(\frac{sR\omega_Q^2 - L\omega_Q^2 (\omega_0^2 - \omega_Q^2)}{s^2 + \omega_Q^2} - \frac{sR\omega_Q^2 - L\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_Q^2)}{s^2 + \frac{R}{L} s + \omega_0^2} \right) \quad (41) \end{aligned}$$

Die jeweils ersten Terme in den Klammern in Gleichung (41) liefern den homogenen Anteil der Lösung, der aus einer cos- und einer sin-Funktion besteht. Dieser nicht abklingende Teil der Gesamtlösung hätte beispielsweise auch mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung gefunden werden können. Die zweiten Terme in den Klammern müssen zur weiteren Behandlung zerlegt werden. Zunächst kann man für den Nenner wie folgt schreiben:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \omega_0^2 = \left(s + \frac{R}{2L} + \omega_L \right) \left(s + \frac{R}{2L} - \omega_L \right) \quad \text{mit} \quad \omega_L^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \omega_0^2 \quad (42)$$

Mit Hilfe dieser Umformung kann auch der zweite Term in Partialbrüche zerlegt und rücktransformiert werden. Wie die Definition von ω_L in Gleichung (42) zeigt, ist es wichtig, die unterschiedlichen Dämpfungsgrade zu unterscheiden, da ω_L entweder rein reell, rein imaginär oder Null wird. Abhängig davon ergeben sich abklingende hyperbolische, abklingende trigonometrische oder reine Exponential-Funktionen für die flüchtige Lösung.

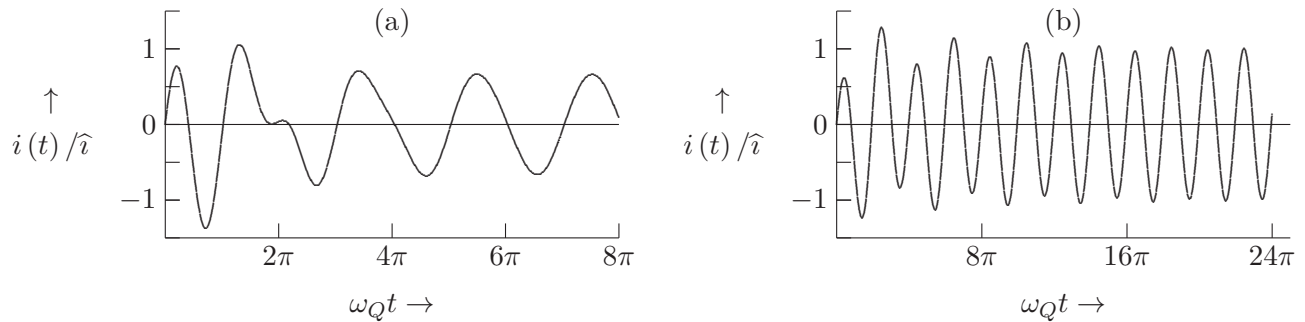


Abbildung 11. Darstellung des Stromverlaufes: (a) für den Fall, dass die eingepreßte Frequenz kleiner ist als die Resonanzfrequenz des Schwingkreises und (b) für den Fall, dass die eingepreßte Frequenz größer ist als die Resonanzfrequenz des Schwingkreises. In beiden Fällen ist der Widerstand so gewählt worden, dass eine geringe Dämpfung vorliegt und somit der Ausgleichsvorgang langsam abklingt.

3 Versuchsbeschreibung

Zur Darstellung der Einschaltvorgänge stehen zwei verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Für langsam ablaufende Vorgänge können die Zeitverläufe von Strom und Spannung auf einem XY-Schreiber aufgezeichnet werden. Das Schalten kann in diesem Fall von Hand erfolgen. Für schnelle Vorgänge bietet sich die Darstellung auf dem Oszillographenbildschirm an. Steht kein Speicheroszillograph zur Verfügung, so muss dafür gesorgt werden, dass ein stehendes Bild dadurch entsteht, dass der Einschaltvorgang laufend wiederholt wird. Die Wiederholungsfrequenz muss dabei so gewählt werden, dass ihre Periodendauer groß gegenüber der Dauer des Ausgleichsvorganges ist, sodass die zu untersuchende Schaltung bei Beginn des nächsten Zyklus' wieder in ihren Ausgangszustand zurückgekehrt ist. D. h. zwischen Einschalten und Ausschalten sowie erneutem Einschalten der Quelle muss soviel Zeit vergehen, dass mögliche Ausgleichsvorgänge von Strömen und Spannungen im Netzwerk weitgehend abgeschlossen sind. Als Spannungsquelle für die Darstellung von schnelleren Vorgängen wird ein spezieller Generator benutzt. Er erzeugt einen Rechteckimpuls mit einer relativ großen Periodendauer. Die Rechteckimpulse können direkt dazu benutzt werden, das Einschalten einer Gleichspannung zu simulieren. Sie steuern gleichzeitig auch einen elektronischen Schalter (Chopper), mit dem sich Sinusschwingungen einer höheren Frequenz schalten lassen. Der Einschaltzeitpunkt ist mit Hilfe eines zusätzlichen Operationsverstärkers verschiebbar, so dass die Einschaltphase des Sinussignals eingestellt werden kann (Phasenanschnitt). Ausserdem liefert der Generator einen Triggerimpuls für eine externe Triggerung des Oszillographen.

3.1 Versuchsdurchführung

1. Schalten Sie an die Reihenschaltung eines Kondensators ($C = 100 \mu\text{F}$, Polarität beachten!) und eines Widerstandes ($R = 33 \text{ k}\Omega$) eine Gleichspannung von $U = 8 \text{ V}$ mit Hilfe der LabVIEW-Anwendung *Netzteil_RC.vi*. Erfassen Sie den Verlauf der Kondensatorspannung und des Stromes mit dem Y-t-Schreiber, der durch die LabVIEW-Anwendung *RC_Plotter2.vi* zuvor gestartet wird. Drucken Sie die beiden Y-t-Diagramme aus und bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Zeitkonstante τ des Ausgleichsvorganges. Nutzen Sie den Ausgang **DAC 0** als Spannungsquelle und zur Spannungsmessung mit dem Y-t-Diagramm den Eingang **ACH 0**.
2. Legen Sie mit Hilfe der LabVIEW-Anwendung *ATE_Generator.vi* eine geschaltete Sinusspannung an die Reihenschaltung $R = 33 \text{ k}\Omega$ und $C = 0.047 \mu\text{F}$. Stellen Sie den Verlauf der Kondensatorspannung für einen günstigen und ungünstigen Einschaltzeitpunkt (einstellbar über den Phasenregler des ATE_Generators) auf dem ELVIS-Oszilloskop dar. Das Signal des ATE-

Generators wird am Ausgang **DAC 0** bereitgestellt. Skizzieren Sie den Verlauf der Kondensatorspannung und die Schaltzeitpunkte für einen günstigen und ungünstigen Einschaltzeitpunkt (ein Schaltzyklus) in Bild 12.

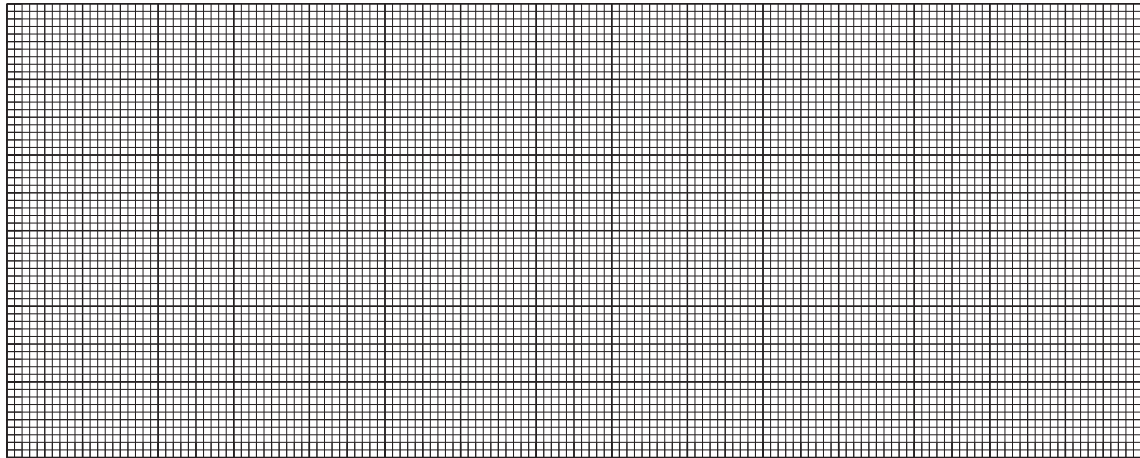


Abbildung 12. Kondensatorspannung für einen ungünstigen Schaltzeitpunkt.

3. Bauen Sie eine Reihenschaltung bestehend aus einem Widerstand ($R = 1\text{ k}\Omega$) und einer Induktivität (Primärwicklung eines Transformators) auf und untersuchen Sie das Einschaltverhalten bei angelegter Rechteckspannung ($T > t$). Erfassen Sie dafür mit dem ELVIS Oszilloskop den Strom und die Spannung an der Induktivität sowie die Generatorspannung U_g .

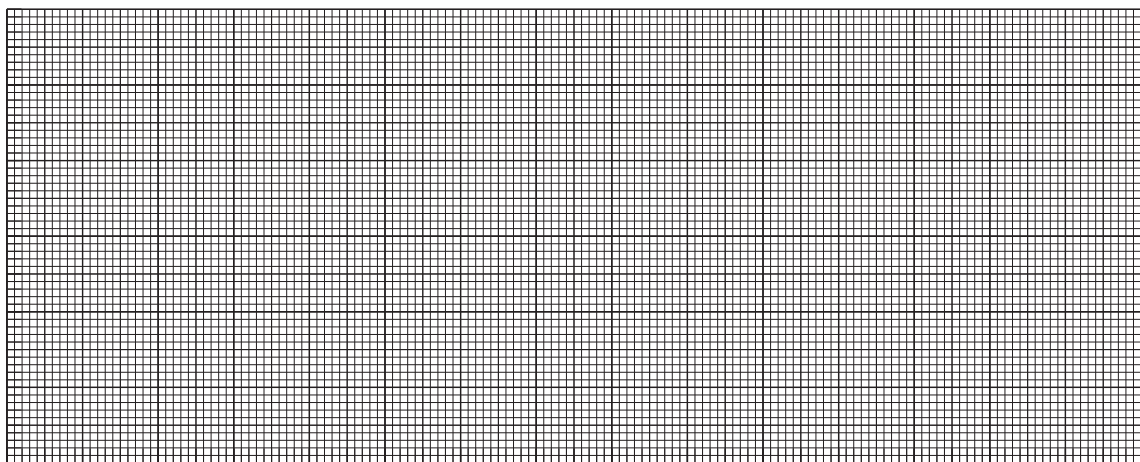


Abbildung 13. Strom und Spannung an der Induktivität und Generatorspannung.

4. Legen Sie nun an die Schaltung nach 3. eine geschaltete Sinusspannung an, erfassen Sie den Verlauf des Stromes durch die Induktivität für einen ungünstigen Einschaltzeitpunkt. Skizzieren Sie den Verlauf des Stromes und markieren Sie die Schaltzeitpunkte in Bild 14.
5. Erweitern Sie nun die Schaltung nach 3. zu einem Serienschwingkreis ($R = 1\text{ k}\Omega$, $C = 0.047\text{ }\mu\text{F}$, $L = \text{Transformatorwicklung}$) und stellen Sie den Stromverlauf bei einer angelegten Rechteckspannung dar. Skizzieren Sie in Bild 15 qualitativ den Stromverlauf und markieren Sie die Schaltzeitpunkte.
6. Betreiben Sie nun den Serienschwingkreis in Resonanz, in dem Sie eine sinussförmige Spannung mit der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ anlegen. Stellen Sie den Generator zuvor auf die Resonanzfrequenz ω_0 ein. Wie lautet die Resonanzbedingung und wie kann die Resonanzfrequenz bestimmt werden? Skizzieren Sie in Bild 16 den Stromverlauf.

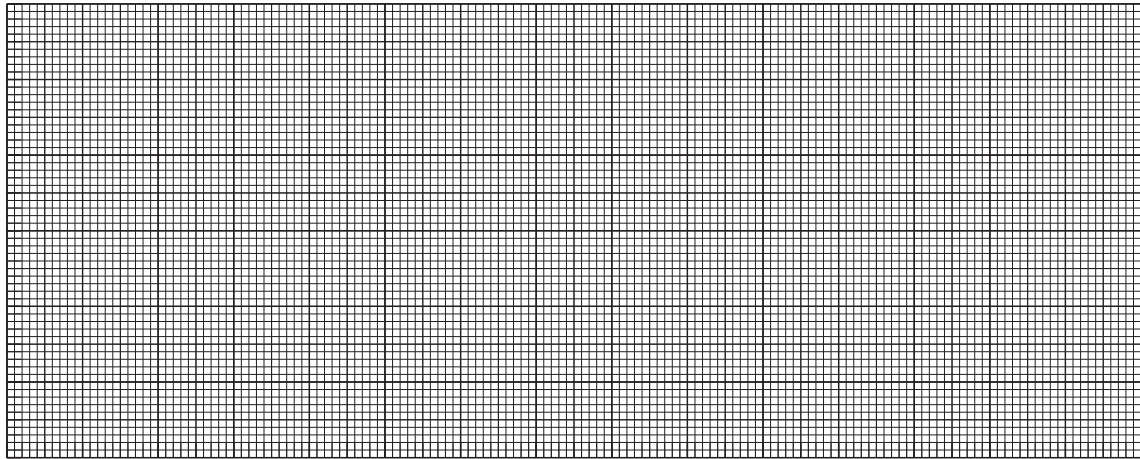


Abbildung 14. Strom durch die Induktivität bei geschalteter sinusförmiger Quellenspannung.

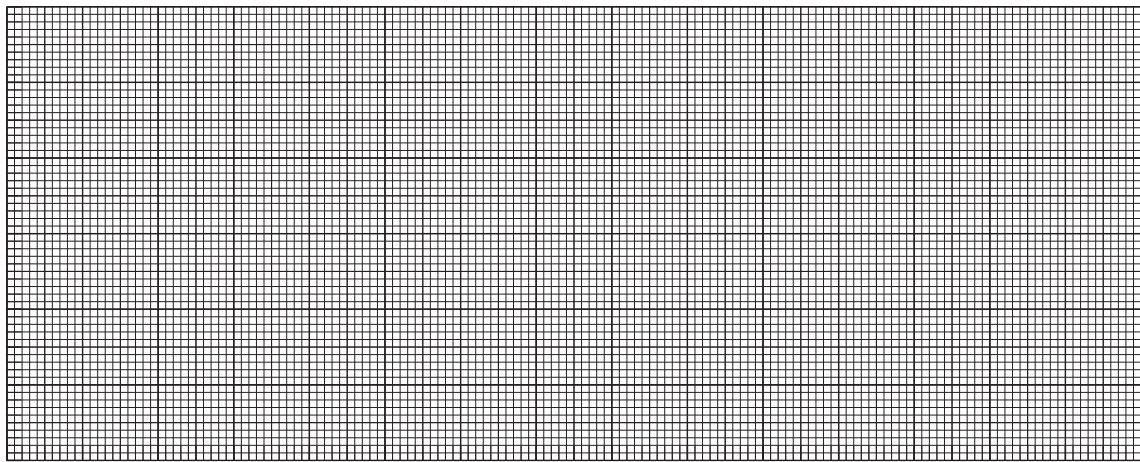


Abbildung 15. Stromverlauf im Serienschwingkreis bei rechteckförmiger Quellenspannung.

7. Schalten Sie an den Serienschwingkreis (nach 6.) eine höhere und eine niedrigere Frequenz und stellen Sie den Verlauf des Stromes dar. Skizzieren Sie in Bild 17 den Verlauf des Stromes und markieren Sie die Einschaltzeitpunkte. Welche Charakteristika ist zu erkennen ?

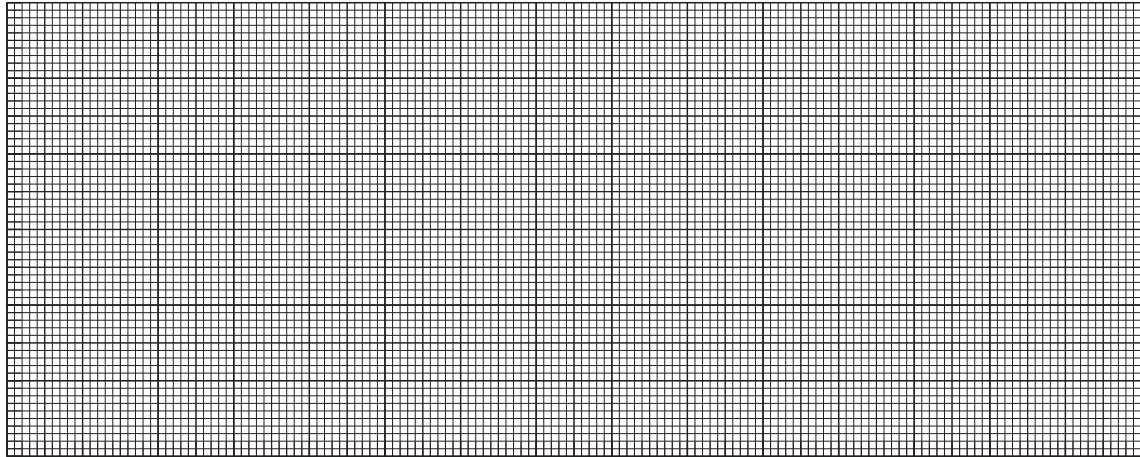


Abbildung 16. Stromverlauf im Serienschwingkreis bei sinusförmiger Quellenspannung ($\omega_Q = \omega_0$).

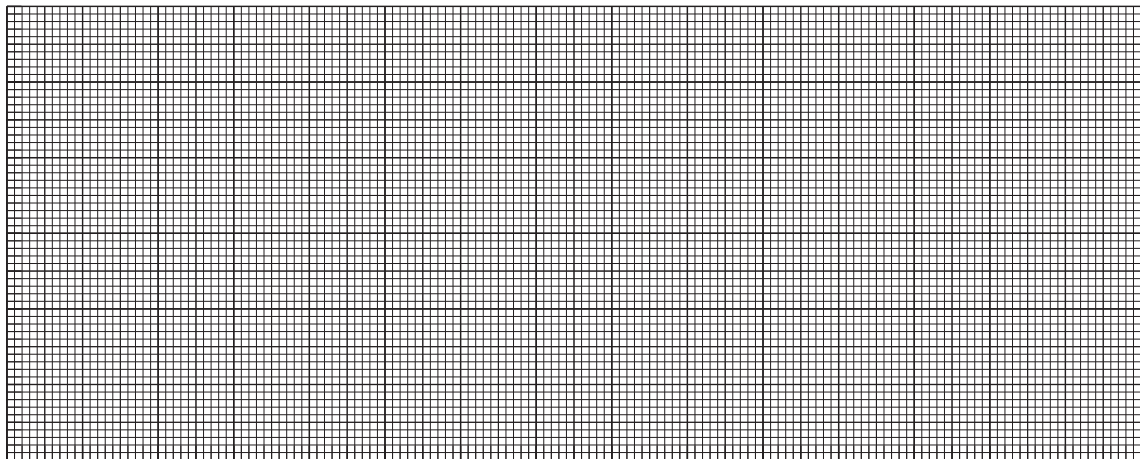


Abbildung 17. Stromverlauf im Serienschwingkreis bei sinusförmiger Quellenspannung ($\omega_Q \neq \omega_0$).